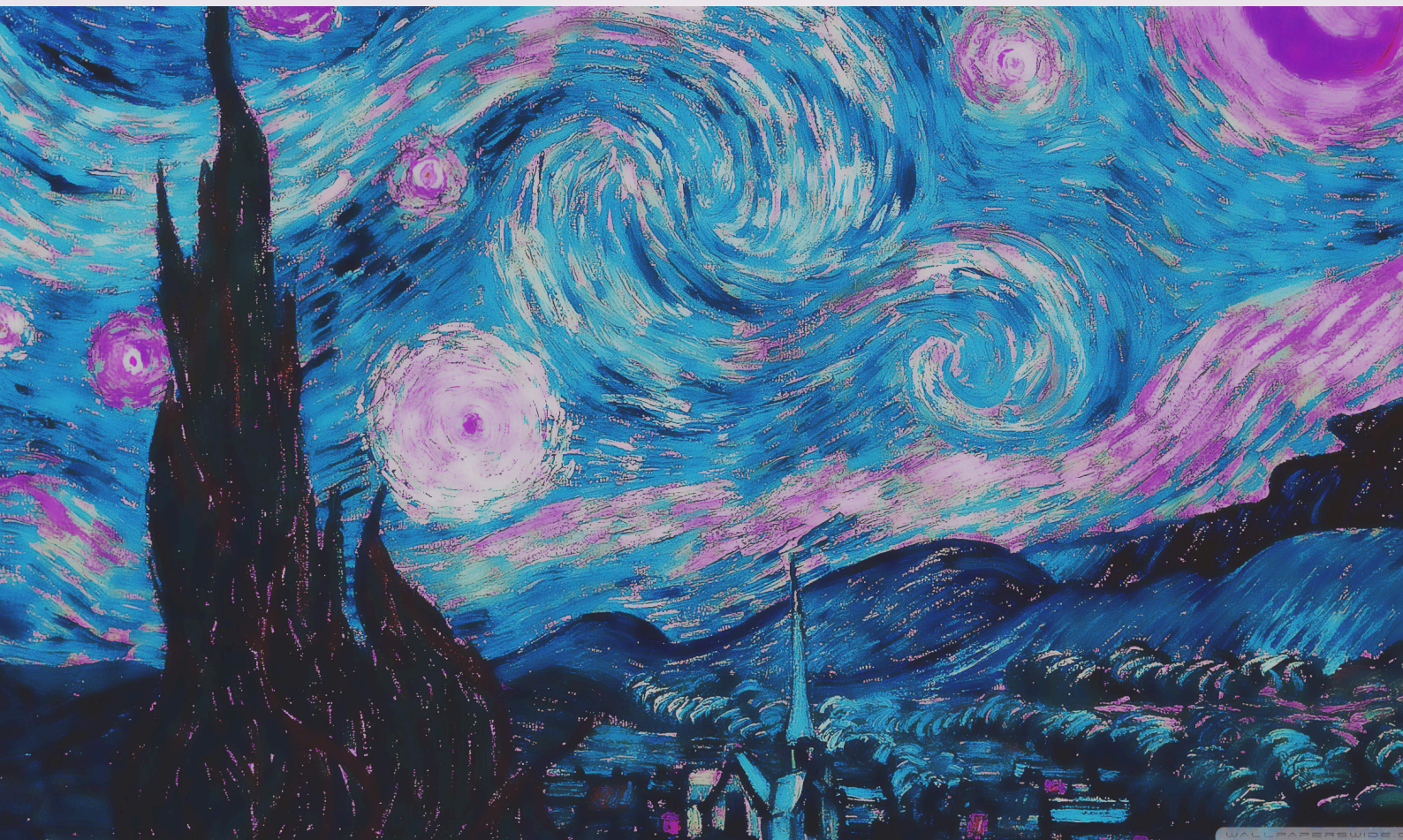


Notes on Superfluid Hydrodynamics

Jingyuan XU
Zhejiang University, Peking University





Contents

1 A Primer on Superfluid	3
1.1 Bose-Einstein Condensation	3
1.2 Fermi-Dirac Condensation	5
1.3 Superfluidity	6
1.4 Quantized Vortices	6
1.5 Second Sound Waves	6
1.6 Kelvin Waves and Vortex Reconnections	6
1.7 Quantum Turbulence	6
1.8 Physical Properties	6
2 Dynamics Description	7
2.1 Microscopic	7
2.1.1 The Gross-Pitaevskii Equation	7
2.1.1.1. Steady Gross-Pitaevskii Equation	7
2.1.1.2. Unsteady Gross-Pitaevskii Equation and Fluid Description	7
2.1.1.3. Solution of Steady GPE	9
2.1.1.3.1. 均匀凝聚体 (无限大区域)	9
2.1.1.3.2. 一维半无限大区域	9
2.1.1.3.3. 三维球谐振子势	10
2.1.1.3.4. 各向异性势与降维	11
2.1.1.4. The Vortical Solution of GPE	12
2.1.1.5. Vortex Core	14
2.1.1.6. Vortex Energy and Angular Momentum	16
2.2 Mesoscopic	18
2.2.1 Vortice Filament Model	18
2.3 Macroscopic	18
2.3.1 Landau Two-Fluid Model	18
2.3.2 HVBK Model	18
2.3.2.1. Vinen's Equation	18
2.3.3 Homogeneous Superfluid Turbulence Model	18
2.3.4 One-Fluid Model	18
3 Special Topics	18
3.1 Rayleigh-Benard Convection	18
3.2 Counterflow	18
3.3 Taylor-Couette Flow	18
4 References	18



1 A Primer on Superfluid

1.1 Bose-Einstein Condensation

玻色子自旋量子数为整数，满足玻色-爱因斯坦统计，费米子自旋量子数为半整数，满足费米-狄拉克统计。玻色子可以在同一量子态上叠加，而费米子则不能（泡利不相容原理）。因此，玻色-爱因斯坦凝聚和费米-狄拉克凝聚的物理机制不同。以下分别为两种统计的概率分布密度函数：

$$f_{\text{BE}}(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} - 1} \quad (1)$$

$$f_{\text{FD}}(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} + 1} \quad (2)$$

由简并态数在相空间内的总体积不变，有：

$$h^3 g(E) dE = h^3 g(p) dp = \mathcal{V} 4\pi p^2 dp \quad (3)$$

故

$$g(p) = \frac{\mathcal{V}}{h^3} 4\pi p^2, \quad g(E) = \frac{\mathcal{V}}{h^3} 2\pi (2m)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

玻色子的激发态粒子数满足（连续分布假设）

$$\begin{aligned} N_e &\sim \int_0^\infty f_{\text{BE}}(E) g(E) dE = \frac{\mathcal{V}}{h^3} 2\pi (2m)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \frac{E^{\frac{1}{2}}}{e^{(E-\mu)/kT} - 1} dE \\ &= \frac{\mathcal{V}}{h^3} 2\pi (2mkT)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \sum_{n=0}^\infty \frac{\exp(n\mu/kT)}{n^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (5)$$

当 $\mu \leq 0$ 有收敛解，且 $\mu = 0$ 存在临界值：

$$N_c = \frac{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} \mathcal{V}}{h^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \sim T^{\frac{3}{2}} \quad (6)$$

因此当温度降低时，该临界值也会降低，当 $N > N_c$ 时，激发态粒子数不再随温度降低而增加，剩余的粒子只能进入基态，形成**玻色-爱因斯坦凝聚**。

为了方便表述，我们还可以定义一个临界温度：

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi mk} \left(\frac{N}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \mathcal{V}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (7)$$

故

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{N_e}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad T < T_c \quad (8)$$

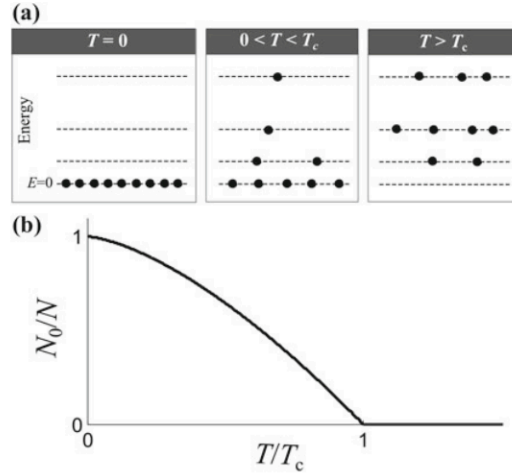


图 1: **玻色-爱因斯坦凝聚**基态粒子数随温度变化的关系图

通过以上推导得知，当温度降低至临界温度 T_c 以下时，玻色子会逐步从激发态汇聚至基态。特别的，在球对称谐振子势阱中，随着温度降低，密度分布会从满足玻尔兹曼分布的平坦分布逐步变为中心集中的分布，最终在 $T = 0$ 时，所有玻色子都处于基态。

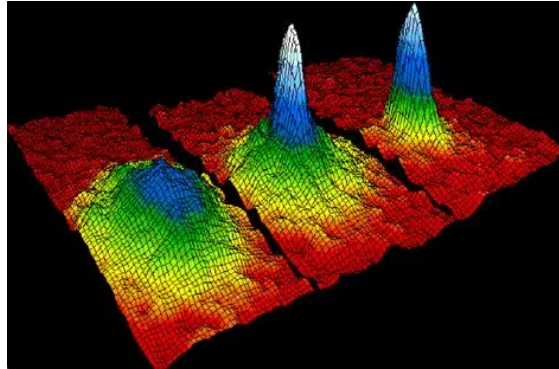


图 2: 著名的**玻色-爱因斯坦凝聚**验证实验结果示意图

显然，玻色-爱因斯坦凝聚的形成需要足够大的粒子数密度和足够低的温度，有趣的是，当满足前一个条件时，恰好满足玻色子物质波的波长大于其自身距离的尺度，即玻色子物质波会发生如下的叠加：

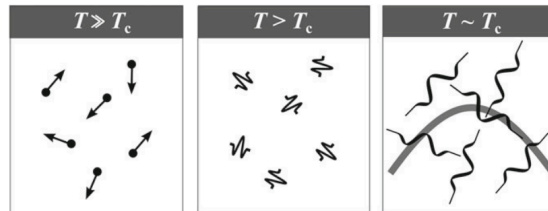


图 3: **玻色-爱因斯坦凝聚**的物质波叠加示意图

由于内能和压力来自于激发态粒子数目的贡献，因此玻色-爱因斯坦凝聚态的内能和压力随着温度降低而降低，且在 $T = 0$ 时，内能和压力均为零。对于热容则有：

$$C_V = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ 1.93NkT^{\frac{3}{2}}, & T < T_c \\ \frac{3}{2}NkT, & T \gg T_c \end{cases} \quad (9)$$

该曲线在 $T = T_c$ 处有一个一阶导数不连续的拐点，也可以说明**理想波色系统**中的波色-爱因斯坦凝聚可视**为三级相变**：

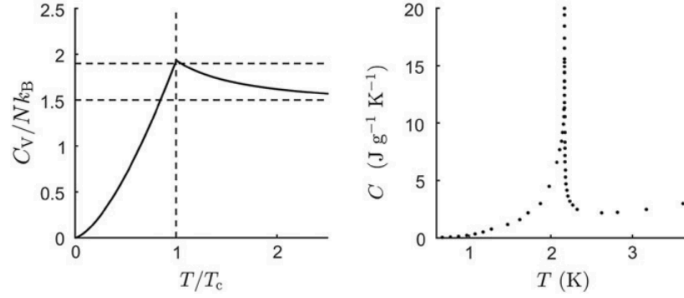


图 4: **波色-爱因斯坦凝聚**热容随温度变化曲线及液氦热容实验结果对比

而对于 ^4He 的实验结果对此进行了验证，但其热容曲线在 $T = T_c$ 并不连续，说明其相变为**二级相变**，且实验得出的临界温度和计算结果略有不同，因此氦的相变并非简单的波色-爱因斯坦凝聚，由于其粒子间存在较强相互作用，需要更复杂的理论进行解释。

1.2 Fermi-Dirac Condensation

由于受泡利不相容原理的制约，费米子不能在同一量子态上叠加，因此费米-狄拉克凝聚的形成需要满足更严格的条件。在 $T = 0$ 时，费米-狄拉克统计的概率分布密度函数满足阶跃函数分布：

$$f_{\text{FD}}(E) = \begin{cases} 1, & E \leq E_F \\ 0, & E > E_F \end{cases} \quad (10)$$

其中 E_F 为**费米能级**(Fermi Energy)。由此计算费米狄拉克凝聚的总粒子数为：

$$N = \int_0^\infty f_{\text{FD}}(E)g(E) dE = \frac{4\pi\mathcal{V}}{3h^3}(2mE_F)^{\frac{3}{2}} \quad (11)$$

由此可得费米能级为

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3n}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\hbar^2}{2m} (6\pi^2 n)^{\frac{2}{3}} \quad (12)$$

费米-狄拉克凝聚保证了零温下不是所有费米子都能处于基态，因此零温下具有简并的内能和压力。

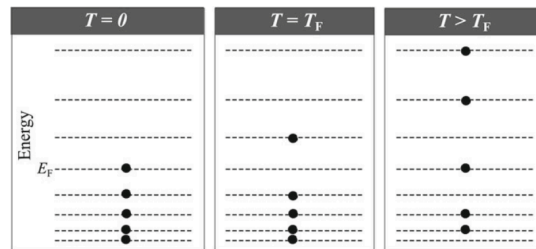


图 5: **费米-狄拉克凝聚**基态粒子数随温度变化的关系图

另外我们还可以定义费米温度 $T_F = E_F/k = \hbar^2/(2mk)(6\pi^2n)^{2/3}$ ，当温度逐渐从零温升高，费米子会向上跃迁，在 T_F 附近，只有靠近费米能级的粒子会跃迁出费米能级，而当 $T \gg T_F$ 时，大部分粒子会跃迁出费米能级，费米-狄拉克凝聚的特性逐渐消失，粒子分布倾向变为玻尔兹曼分布。当费米系统处于球对称谐振子势阱中时，会有类似波色-爱因斯坦凝聚的现象，但因为简并压力的存在，形成费米-狄拉克凝聚时其峰值域会更宽。

1.3 Superfluidity

超流 (Superfluidity) 可视为一种相变。由于 ^4He 是玻色子， ^3He 是费米子，很容易联想到两种凝聚态：**波色-爱因斯坦凝聚 (Bose-Einstein Condensation)** 和 **费米-狄拉克凝聚 (Fermi-Dirac Condensation)**，不过两种凝聚主要用于表示**量子气体**的相变行为，而对于**量子液体**组成的波色/费米系统（即存在较强粒子间相互作用），则分别需要独立的超流相变理论解释。

超流氦 (Superfluid Helium) 是著名的展现宏观超流性的物质。 ^4He 有两种液相：He I 和 He II，He I 为正常液相，He II 为超流相，也被称为超流氦。超流性一词源于苏联物理学家卡皮查 (Kapitza) 的实验——超流氦能够在极小狭缝中流动 (regardless of viscosity)，故类比超导 (regardless of resistance) 赋名；同时超流氦还具有超高的导热能力，导热系数为铜的 10^6 倍。另外 ^3He 也存在超流转变，且存在 $^3\text{He A}$ 、 $^3\text{He B}$ 两种超流相。

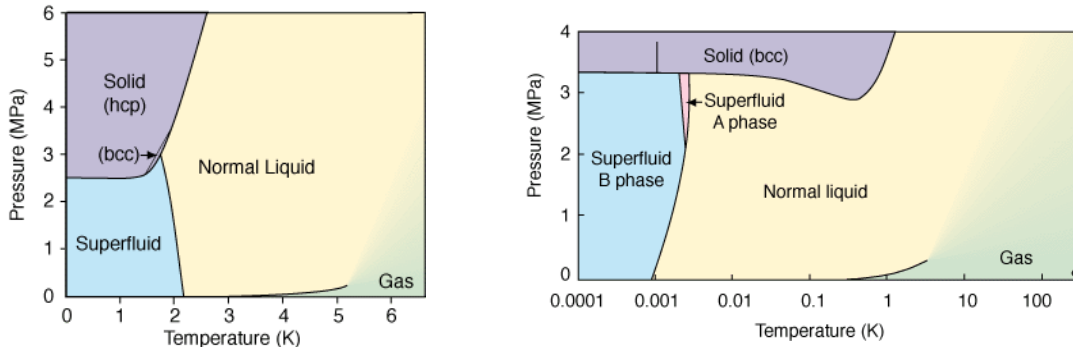


图 6: ^4He 和 ^3He 相图

1.4 Quantized Vortices

1.5 Second Sound Waves

1.6 Kelvin Waves and Vortex Reconnections

1.7 Quantum Turbulence

1.8 Physical Properties

- <https://www.mas.ncl.ac.uk/helium/>
- <https://htess.com/hepak/>



2 Dynamics Description

2.1 Microscopic

2.1.1 The Gross-Pitaevskii Equation

对于玻色系统，考虑两体相互作用，因此在哈密顿量的势能项中需要额外加上相互作用能，在单粒子体系下表示为薛定谔方程(Schrödinger Equation)则有：

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V + g|\Psi|^2 \right) \Psi \quad (13)$$

其中

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}, \quad a_s \text{ 为散射半径} \quad (14)$$

该方程称之为 **Gross-Pitaevskii Equation(GPE)**，由于额外增加了非线性项 $g|\Psi|^2 \Psi$ ，GPE 的求解一般需要某些简化操作。类似的非线性薛定谔方程也常常出现在等离子体、光学领域。

另外我们也可以计算能量和动量的本征值：

$$E = \int_C \Psi^* \hat{H} \Psi d^3r = \int_C \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Psi|^2 + V|\Psi|^2 + \frac{1}{2}g|\Psi|^4}_{\mathcal{E}} d^3r \quad (15)$$

$$P = \int_C \Psi^* \hat{p} \Psi d^3r = \frac{1}{2}i\hbar \int_C \underbrace{\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi}_{\mathcal{P}} d^3r \quad (16)$$

【涉及操作 $\int \Psi^* \nabla^2 \Psi d^3r = \int \nabla \cdot (\Psi^* \nabla \Psi) - |\nabla \Psi|^2 d^3r$ 】

2.1.1.1. Steady Gross-Pitaevskii Equation

不依赖于时间的上述 GPE 的解可以简化为

$$\Psi = \psi e^{-i\mu t/\hbar} \quad (17)$$

因此 GPE 亦可简化为：

$$\mu \psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V + g|\psi|^2 \right) \psi \quad (18)$$

化学势 μ 可作为特征值，满足：

$$\mu = \frac{\partial E}{\partial N} = \frac{E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} + 2E_{\text{int}}}{N} \quad (19)$$

2.1.1.2. Unsteady Gross-Pitaevskii Equation and Fluid Description

对(13) 分别左右两侧作用 Ψ^* ，消掉共轭项得：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \Psi) = -\frac{\hbar^2}{2m} (\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \cdot (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \quad (20)$$



由高斯定理可得：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \int_C \Psi^* \Psi d^3\mathbf{r} = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{\partial C} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) dS \quad (21)$$

即**连续性方程**(Continuity Equation)：

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (22)$$

其中 $n = \Psi^* \Psi = |\Psi|^2$, $\mathbf{j} = n \mathbf{v}_s = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi)$

取

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t) e^{i\phi(\mathbf{r}, t)} \quad (23)$$

由此我们可以定义流速

$$\mathbf{v}_s = \frac{i\hbar}{2m|\Psi|^2} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) = \frac{\mathcal{P}}{M} = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi = \frac{\hbar}{im} \nabla \ln \left(\frac{\Psi}{\sqrt{n}} \right) \quad (24)$$

可见波色流体的流速为梯度场, $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$, 因此波色流体为**无旋流体**。

用相位 ϕ 来表示 GPE, 则可得：

$$i\hbar \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + i\psi \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla^2 - (\nabla \phi)^2) + i\nabla^2 \phi + 2i\nabla \phi \cdot \nabla + V + g\psi^2 \right) \psi \quad (25)$$

取实部有：

$$\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = - \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \nabla^2 \psi + \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \phi)^2 + V + g\psi^2 \right) \quad (26)$$

两边同时求梯度后, 代入连续性方程即得到超流体的**欧拉方程**(Euler Equation)：

$$m \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = -\nabla \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} m v^2 + V + g n \right) \quad (27)$$

标准形式：

$$m n \left(\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \nabla \mathbf{v}_s \right) = -\nabla \left(\underbrace{-\frac{\hbar^2}{4m} n \nabla^2 \ln n}_{P'} + \underbrace{\frac{g n^2}{2}}_P \right) - n \nabla V \quad (28)$$

也可以写成指标形式：

$$m \frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = -n \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (29)$$

$$\Pi_{ik} = -\frac{\hbar^2}{4m^2} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x_k} - \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x_i \partial x_k} + c.c. \right] + \frac{g n^2}{2} \delta_{ij} \quad (30)$$



P 为常规下的压强, P' 为**量子压强(Quantum Pressure)**。它的产生同零点能——由于不确定性原理, 粒子不能完全静止, 因此即使在零温下, 粒子仍然具有动能, 在凝聚体系中表现为一种抵抗外界形变的压力。式(22)和(28)即为**超流体动力学方程(Superfluid Hydrodynamic Equations)**。

对于常规压强和量子压力的占优情况, 我们可以引入无量纲量 $\frac{P'}{P} \sim \frac{\hbar^2}{gm n \xi^2}$ 来进行定性反映, 当 $\frac{P'}{P} \ll 1$ 时, 可忽略量子压强, 由此也引申出 ξ 的含义——**愈合长度(Healing Length)**, 用于度量粒子间相互作用从无到有的分界, 定义如下:

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{gm n}} \quad (31)$$

对于 BEC, $\xi \sim 10^{-6}\text{m}$, 对于超流氦($^4\text{He II}$), $\xi \sim 10^{-10}\text{m}$, 该尺度与涡旋核心的尺寸有关。

2.1.1.3. Solution of Steady GPE

引用 Gross-Pitaevskii 方程:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V + g|\Psi|^2 \right) \Psi \quad (32)$$

由于其非线性项, 直接对其求解存在困难, 因此需要考虑某些简单的边界条件或方程简化操作。

2.1.1.3.1. 均匀凝聚体 (无限大区域)

不考虑外加势场且波函数在空间均匀分布, GPE 简化为

$$\mu\psi = g|\psi|^2 \psi \quad (33)$$

全空间解为 $\psi = \sqrt{\mu/g} = \psi_0$, 此时系统粒子各处密度、数目均匀分布。

2.1.1.3.2. 一维半无限大区域

考虑一维区域的外加势场

$$V = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} \quad (34)$$

显然在无穷远处 $\psi = \psi_0$, 内部区域 GPE 简化为:

$$\mu\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + g|\psi|^2 \psi \quad (35)$$

考虑边界条件可解得:

$$\psi(x) = \psi_0 \tanh\left(\frac{x}{\xi}\right) \quad (36)$$

而通常的薛定谔方程则解得:

$$\psi(x) = \psi_0 \sin\left(\frac{x}{L}\right) \quad (37)$$

类似可对比表示一维无限深方势阱的情况。



2.1.1.3.3. 三维球谐振子势

在外加三维球谐振子势情况下，有：

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (38)$$

因此 GPE 简化为：

$$\mu\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \psi + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \psi + g|\psi|^2 \psi \quad (39)$$

若不考虑相互作用($g = 0$)，则可解得

$$\psi(r) = \frac{N^{1/2}}{\pi^{3/4} l_r^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2l_r^2}\right) \quad (40)$$

描述为密度分布：

$$n(r) = \frac{N}{\pi^{3/2} l_r^3} \exp\left(-\frac{r^2}{l_r^2}\right) \quad (41)$$

表现为**高斯波函数**，其中 $l_r = \sqrt{\hbar/m\omega}$ 为谐振子特征长度。

倘若考虑相互作用，则需区分斥力($g > 0$)和引力($g < 0$)两种情况。

当 $g > 0$ 时，且满足 $Na_s/l_r \gg 1$ 时 (a_s 为散射长度)，排斥相互作用能远大于基态粒子的动能，因此可忽略动能项——该近似称为**托马斯费米近似(Thomas-Fermi approximation)**，GPE 简化为：

$$\mu\psi = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \psi + g|\psi|^2 \psi \quad (42)$$

解得当 $r \leq \frac{\sqrt{2\mu/m}}{\omega}$ 时有：

$$\psi(r) = \sqrt{\frac{\mu - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2}{g}} \quad (43)$$

当 $r > \frac{\sqrt{2\mu/m}}{\omega}$ ， $\psi(r) = 0$ ，记 $R_r = \frac{\sqrt{2\mu/m}}{\omega}$ 为**托马斯-费米半径(Thomas-Fermi radius)**。描述为密度分布：

$$n(r) = \begin{cases} \frac{\mu}{g} \left(1 - \frac{r^2}{R_r^2} \right), & r \leq R_r \\ 0, & r > R_r \end{cases} \quad (44)$$

可以类似表示椭球谐振子势的情况：

$$n(r) = \begin{cases} \frac{\mu}{g} \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right), & \text{椭球内} \\ 0, & \text{椭球外} \end{cases} \quad (45)$$

现在我们以谐振子长度 l_r 为基准球面，作以 R_r 为半径球面的调和球面，可知其半径恰为 $\xi = l_r^2/R_r$ ，进一步说明了愈合长度的物理意义。

无论 g 的符号, 若满足 $|Na_s/l_r| < 1$, 则无法忽略动能项, 此时可采用**假设**(ansatz)进行近似求解, 假设波函数为高斯波函数形式

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{N^{1/2}}{\pi^{3/4} \sigma^{3/2} l_r^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2 l_r^2}\right) \quad (46)$$

其中 σ 为**变分参数**。将其代入能量表达式:

$$E(\sigma) = \hbar\omega N \left[\underbrace{\frac{3}{4\sigma^2}}_T + \underbrace{\frac{3\sigma^2}{4}}_V + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{Na_s}{l_r} \frac{1}{\sigma^3}}_U \right] \quad (47)$$

可得整个系统能量随 σ 变化而变化, 且动能和相互作用能均随 σ 减小而增大, 势能则相反。整个系统应于能量取极小值点处达到平衡, 因此对 $E(\sigma)$ 求导并令其为零($\sigma > 0$), 可得:

$$\sigma^5 - \sigma = \frac{Na_s}{l_r} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (48)$$

- 若系统恰好无相互作用, 即 $g = 0 = \text{RHS}$, 则有 $\sigma = 1$ 。
- 若系统表现为斥力, 则 $g > 0, \text{RHS} > 0$, 在 $\sigma > 1$ 的区间内有一个极小值点, 此时取 $\sigma_{\min}$, 且 $\sigma_{\min}$ 随 Na_s/l_r 增大而增大, 说明斥力相互作用会使凝聚体膨胀。当 g 接近于1时, 此时分布更接近托马斯-费米模型的分布。
- 若系统表现为引力, 则 $g < 0, \text{RHS} < 0$, 在 $0 < \sigma < 1$ 的区间内存在极小值点, 此时取 $\sigma_{\min}$, 且 $\sigma_{\min}$ 随 $|Na_s/l_r|$ 增大而减小, 说明引力相互作用会使凝聚体收缩。当 $Na_s/l_r < -0.671$ 时, 方程无正实数解, 说明引力相互作用过强, 凝聚体坍塌。

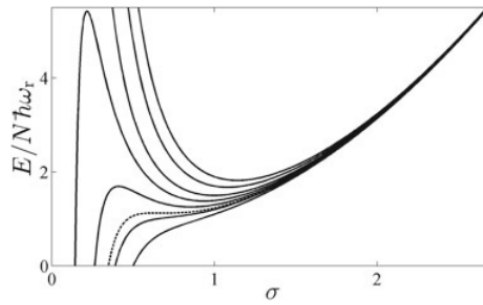


图 7: 变分参数 σ 随无量纲相互作用强度 Na_s/l_r 变化曲线

$$Na_s/l_r = [-1, -0.75, -0.67, -0.5, -0.25, 0, 0.5, 1]$$

2.1.1.3.4. 各向异性势与降维

考虑 $R_z \gg R_x, R_y$ 以及 $R_z \ll R_x, R_y$ 的椭球面谐振子势, 可分别简化得到一维和二维的凝聚体。

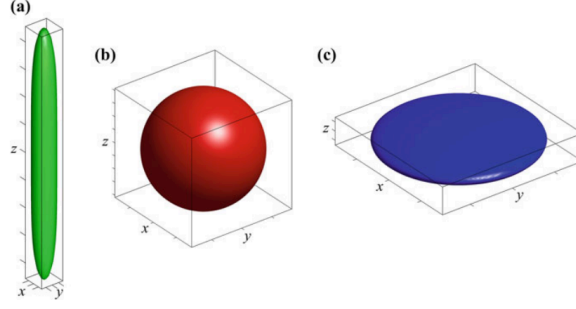


图 8: 简化为不同维数的谐振子势阱形状

降维近似的好处在于可以通过分离变量法将三维 GPE 解耦成更低维度的 GPE，进而简化求解难度。具体方式为：对于被降低的维度，其 $\hbar\omega_i \gg \mu$ ，因此该维度的含时量可忽略不计，另外该维度波函数可预先拟设为高斯分布，在求解时分离变量独立求解。

- 一维：波函数满足：

$$\psi(x, y, z, t) = \psi_z(z, t)G_x(x)G_y(y) \quad (49)$$

满足高斯分布：

$$G_n(n) = \frac{1}{(\pi l_n^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{n^2}{2l_n^2}\right), \quad n = x, y \quad (50)$$

满足一维 GPE：

$$\mu_{1D}\psi_z = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} \psi_z + \frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2 \psi_z + g_{1D} |\psi_z|^2 \psi_z \quad (51)$$

且有 $\mu_{1D} = \mu - (\hbar\omega_x)/2 - (\hbar\omega_y)/2$, $g_{1D} = g/(2\pi l_x l_y)$

- 二维：波函数满足：

$$\psi(x, y, z, t) = \psi_{\perp}(x, y, t)G_z(z) \quad (52)$$

满足高斯分布：

$$G_z(z) = \frac{1}{(\pi l_z^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{z^2}{2l_z^2}\right) \quad (53)$$

满足一维 GPE：

$$\mu_{2D}\psi_{\perp} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi_{\perp} + \left(\frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2} m \omega_y^2 y^2 \right) \psi_{\perp} + g_{2D} |\psi_{\perp}|^2 \psi_{\perp} \quad (54)$$

且有 $\mu_{2D} = \mu - (\hbar\omega_z)/2$, $g_{2D} = g/(2\pi l_z)$

一维和二维的凝聚体有关于相变和稳定性的性质相较三维情况存在差异，如一维凝聚体不会发生坍塌；二维自由波色气体无法发生 BEC 因此不存在凝聚体。

2.1.1.4. The Vortical Solution of GPE

由前文可知波色流体为无旋流体， $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$ ，但实验中发现超流体可以形成涡旋，这与经典流体力学中的涡旋概念不同。考虑 GPE 的涡旋解 $\Psi = \psi e^{iS}$ ，在柱坐标系下，表示为：

$$\Psi(\mathbf{r}) = \psi(r, z)e^{is\varphi} \quad (55)$$

其中 $s \in \mathbb{Z}$ ，用于保证波函数的单值性，此时超流体速度表示为：

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m}s\nabla\varphi = \frac{\hbar s}{m r}e_\varphi \quad (56)$$

速度环量为：

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{2\pi m} \oint \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = s\kappa, \quad \kappa = \frac{\hbar}{m} \quad (57)$$

因此涡旋的环量并非为经典流体中的连续随机值，而是为 κ 的整数倍，称之为**环量子化**(the Quantization of the Circulation)。 s 被称为**涡荷**(charge of the vortex)，当 $s \neq 0$ 时，由于 $v_s \sim \frac{1}{r}$ ，因此在 $r = 0$ 处速度会发散，波函数在该点必须为零，即**涡核**(Vortex Core)处密度为零。 s 的正负性代表速度旋转的顺时针/逆时针方向， s 的大小表征区域内部**奇点**的个数（若将奇点的等价类连成线，则可以得到一族离散的涡线，被称为**量子化涡线**(Quantized Vortex Line)），由此生成的涡旋是离散的，因此也被称为**量子化涡旋**(Quantized Vortice)。该现象可以简单等价于超流的涡旋区域是一个**复连通域**(Multiply-Connected Domain)(s -连通空间)，而非**单连通域**(Simply-Connected Domain)。涡核也称为**拓扑缺陷**(Topological Defects)

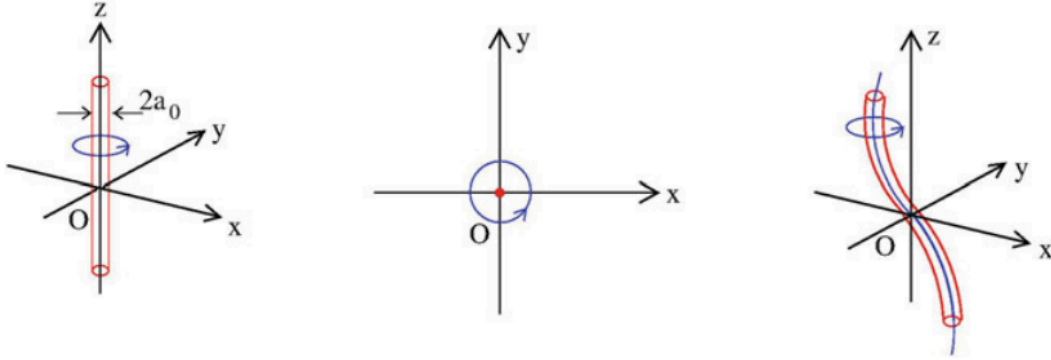


图 9: 量子化涡线示意图

由此我们可以得到此时超流体速度的旋度：

$$\nabla \times \mathbf{v}_s = s\kappa\delta^2(\mathbf{r}_\perp)\mathbf{e}_z \quad (58)$$

以及角速度：

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}s\kappa\delta^2(\mathbf{r}_\perp)\mathbf{e}_z \quad (59)$$

其中 $\mathbf{r}_\perp$ 为涡线所在的平面位置矢量，delta 函数：

$$\delta^2(\mathbf{r}_\perp) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r}_\perp = 0 \\ 0, & \mathbf{r}_\perp \neq 0 \end{cases} \quad (60)$$

下面对几种不同运动状态的角速度进行对比：

- (i) **刚体旋转**：

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \implies v \sim r \quad (61)$$

- (ii) **量子化涡旋**：

$$\Omega = \nabla \times \mathbf{v}, v \sim \frac{1}{r} \quad (62)$$

• (iii) 龙卷风:

$$v \sim \begin{cases} r, & 0 < r \ll a \\ \frac{1}{r}, & r \gg a \end{cases}, \quad a \text{ 为龙卷风核心半径} \quad (63)$$

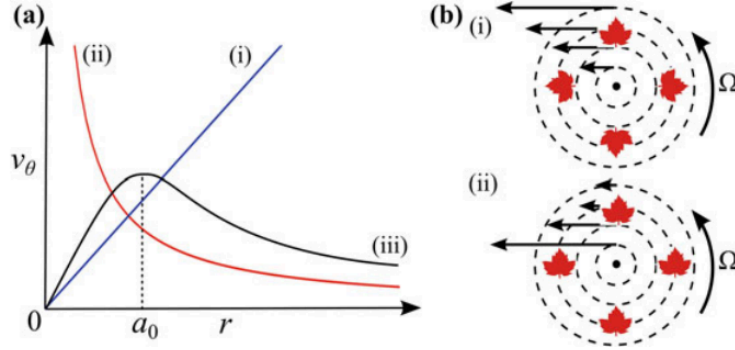


图 10: 不同流体的角速度分布对比图

可见(i)和(ii)的区别在于流体的旋转方式不同, (ii)中流体微元并未发生(i)中的自转, 而是绕涡线公转, 因此(ii)中流体的角速度在涡线处具有奇点。若将奇点尺寸放大则可以比拟成龙卷风的核心, 即可得到(iii)的分布。从这个尺度来看, 量子化涡旋也可视为**量子龙卷风**。

2.1.1.5. Vortex Core

在 $z = \text{const}$ 条件下, 将涡旋解形式代入无外势的 GPE, 可得到:

$$\mu\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2 s^2}{2mr^2} \psi + g\psi^3 \quad (64)$$

记 $\psi = \sqrt{n_0} f(\eta)$, $\eta = \frac{r}{\xi}$ 进行无量纲化, n_0 为平衡时密度, 上式转化为:

$$\frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{df}{d\eta} \right) + \left(1 - \frac{s^2}{\eta^2} \right) f - f^3 \quad (65)$$

f 随 η, s 的变化表示密度随距离、量子涡旋数目变化的关系, 边界条件为:

$$f(0) = 0, f(\infty) = 1 \quad (66)$$

数值解如下:

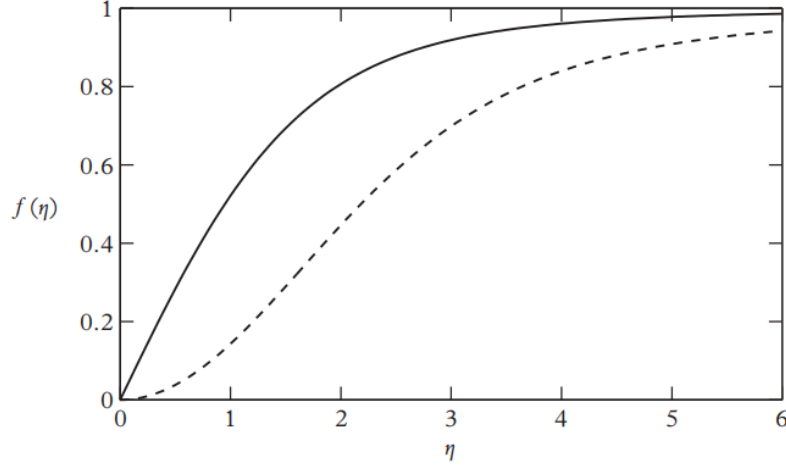


图 11: 不同涡荷 s 下（实线 $s = 1$ ，虚线 $s = 2$ ）的 f 随 η 分布曲线

可见当 $\eta \rightarrow 0$ ，有 $f \rightarrow \eta^{|s|}$ 。该图像反映了随着距离涡核中心的增大，密度逐渐恢复至均匀分布的过程，且涡荷越大，密度恢复越缓。 $s = 1$ 时涡核的半径约为 5 倍愈合长度，即 $a \approx 5\xi$ 。一个可用的估计解为：

$$f(\eta) \approx 1 - \frac{1}{1 + \eta^2} \quad (67)$$

如果存在外部势场（如三维球谐振子势），密度分布则会呈现如下情景：

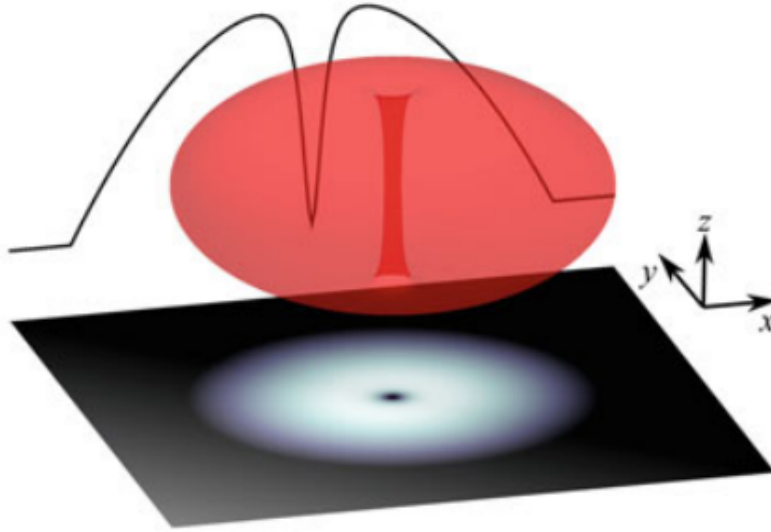


图 12: 在谐振子势阱中密度分布曲线

可见奇点处，即涡核处，密度为零，且随着距离涡核中心的增大，密度逐渐恢复至谐振子势阱中的分布。一个估计分布为：

$$f(\mathbf{r}) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2} - \frac{z^2}{R_z^2}\right) \left(1 - \frac{1}{1 + \eta^2}\right), & r \leq R_r \\ 0, & r > R_r \end{cases} \quad (68)$$

2.1.1.6. Vortex Energy and Angular Momentum

在柱坐标下，假定涡线长度为 l ，区域半径为 R ，涡核半径为 a ，则**涡旋能量**用其动能表示：

$$E_{\text{kin}} = \int_C \frac{1}{2} n m v_s^2 d^3 \mathbf{r} = \frac{\hbar^2 s^2}{2m} \int_C \frac{n(r)}{r^2} d^3 \mathbf{r} \approx \frac{\pi n_0 \hbar^2 s^2}{m} \int_a^R \frac{dr}{r} = \frac{\pi n_0 \hbar^2 s^2}{m} \ln \frac{R}{a} \quad (69)$$

涡旋角动量：

$$L_z = \int_C n m r v_s d^3 \mathbf{r} \approx 2\pi n_0 \hbar s \int_a^R r dr = \pi n_0 \hbar s (R^2 - a^2) \approx \pi n_0 \hbar s R^2 = s N \hbar \quad (70)$$

由于涡旋能量 $E_{\text{kin}} \sim s^2$ ，带有更多涡荷的涡旋能量更高，因此不稳定，倾向于分裂为多个单涡荷涡旋，即往往出现 $s = \pm 1$ 的情况，此时的 E_{kin} 也被称为激发能量。达到激发能量的**临界角速度**为：

$$\Omega_c = \frac{E_{\text{kin}}}{L_z} = \frac{\hbar}{m R^2} \ln \left(\frac{R}{a} \right) = \frac{\kappa}{2\pi R^2} \ln \left(\frac{R}{a} \right) \quad (71)$$

该式来源于自由能 $F = E - \Omega L_z$ 的最小化：

$$\Delta F = E_{\text{kin}} - \Omega L_z \leq 0 \Rightarrow \Omega \geq \Omega_c = \frac{E_{\text{kin}}}{L_z} \quad (72)$$

对于超流氦($^4\text{He II}$, $R = 0.01\text{m}$)， $\Omega_c \sim 3 \times 10^{-3}\text{s}^{-1}$ ，更多涡荷的临界角速度更高。

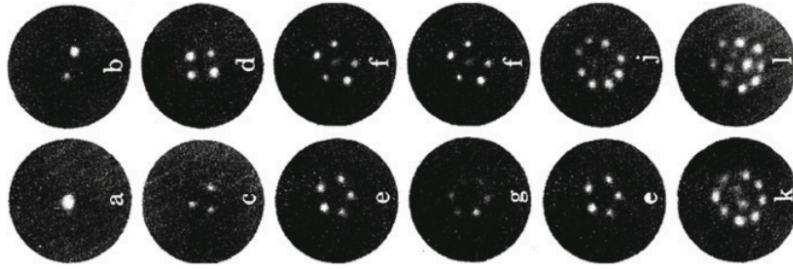


图 13: 实验观测到随着临界角速度增大，超流氦不同涡荷 s 下的量子涡旋

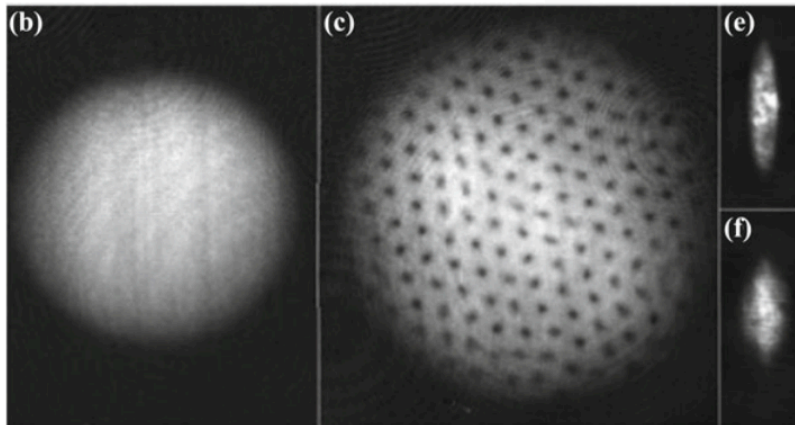


图 14: 实验观测到 BEC 的量子涡旋

另外我们可以定义一个**涡旋(面)密度**(number of vortices per unit area) n_v 和**涡线(体)密度**(length of vortex line per unit volume) L ：



$$n_v = L = \frac{2\Omega}{\kappa} \approx 2000\Omega \text{ lines cm}^{-2} \quad (73)$$

即超流体的涡度大小为:

$$|\nabla \times \mathbf{v}_s| = 2\Omega = \kappa L \quad (74)$$



2.2 Mesoscopic

2.2.1 Vortice Filament Model

2.3 Macroscopic

2.3.1 Landau Two-Fluid Model

2.3.2 HVBK Model

2.3.2.1. Vinen's Equation

Vinen 提出了以下描述涡线密度演化的方程：

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_L L) = \mathcal{P} - \mathcal{D} + g(\mathbf{v}_{ns}) \quad (75)$$

由已知实验可以唯象地导出：

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_L L) = \mathcal{A}_n |\mathbf{v}_{ns}|^n L^{2-n/2} - \mathcal{B}_n L^2 + \gamma_v |\mathbf{v}_{ns}|^{5/2} \quad (76)$$

其中右式第一项表示产生项，右式第二项表示耗散项，该两项存在不同整数幂次 ($n = 1, 2, 3$) 的三种可能解（在稳态情况下均可合理满足结果）右侧第三项的存在与否表示是否考虑涡线密度的弛豫性，若存在则需考虑。

当不考虑第三项时，可以得到稳态涡线密度和相对速度的关系：

$$L_0^{1/2} = \left(\frac{\mathcal{A}_n}{\mathcal{B}_n} \right)^{1/n} |\mathbf{v}_{ns}| \quad (77)$$

2.3.3 Homogeneous Superfluid Turbulence Model

2.3.4 One-Fluid Model

3 Special Topics

3.1 Rayleigh-Benárd Convection

3.2 Counterflow

3.3 Taylor-Couette Flow

4 References

1. Barenghi, Carlo F., and Nick G. Parker. A primer on quantum fluids. Berlin: Springer, 2016.
2. 姚和朋. 冷原子物理与低维量子气体. 科学出版社, 2024



3. Pitaevskii, Lev, and Sandro Stringari. Bose-Einstein condensation and superfluidity. Vol. 164. Oxford University Press, 2016.
4. Donnelly, Russell J. “Cryogenic fluid dynamics.” *Journal of Physics: Condensed Matter* 11.40 (1999): 7783.